

**Concours National Commun  
d'Admission aux  
Grandes Écoles d'Ingénieurs  
Session 2000**

**ÉPREUVE DE PHYSIQUE I**

Durée 4 heures

**Concours MP**

Cette épreuve comporte 9 pages au format A4, en plus de cette page de garde  
L'usage de la calculatrice est *interdit*

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

## Premier problème

### Étude de quelques aspects mécaniques d'une roue de voiture

#### 1<sup>ère</sup> partie

#### Équilibrage d'une roue de voiture

Lorsqu'une roue de voiture possède des défauts de répartition de masse, elle présente alors un défaut d'équilibrage qui se traduit par des vibrations parasites que nous nous proposons d'étudier.

Une roue *parfaite complète* de voiture – jante et pneumatique – est modélisée (figure 1) par un cylindre de section circulaire d'axe  $O'X$ , de rayon  $R$ , d'épaisseur  $2e < R$  et de masse  $M$ . Lorsque la roue est parfaite, la répartition des masses possède la symétrie cylindrique d'axe  $O'X$ . L'utilisation du véhicule sur des routes difficiles peut déformer la roue et détruire la symétrie cylindrique en changeant la répartition des masses.

Nous modélisons la roue déformée en supposant qu'elle se compose :

- d'une roue parfaite complète  $R$  de centre d'inertie  $O'$ , d'axe  $O'X$ , de rayon  $R$ , d'épaisseur  $2e < R$  et de masse  $m = M - \Delta m$  ;
- d'une masse  $\Delta m$  supposée ponctuelle, placée en un point  $A$  de la périphérie de la roue, sur sa face extérieure.

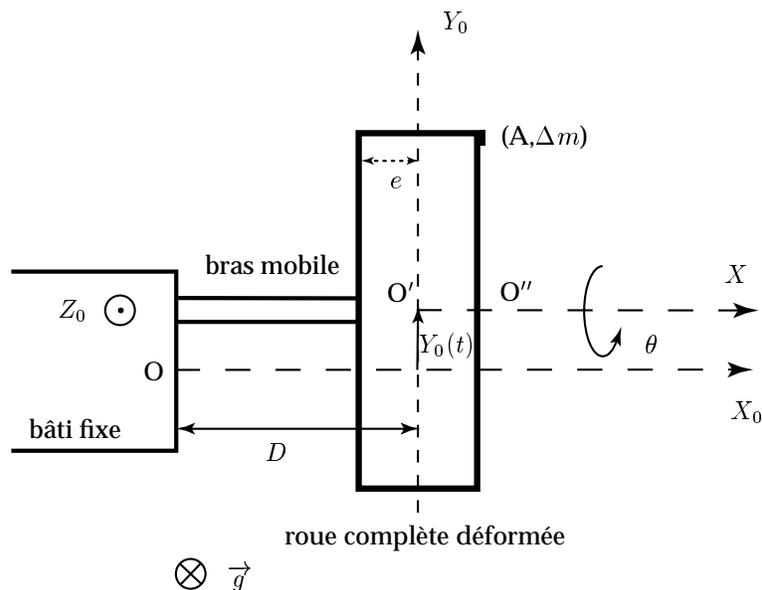


Figure 1: Roue complète déformée montée sur l'équilibreur - vue de coupe

Pour étudier la déformation de la roue et les vibrations parasites qu'elle entraîne, on la place sur un appareil de mesure appelé *équilibreur*. Ce dispositif se compose d'un bâti fixe et d'un bras mobile. On note  $(O, X_0, Y_0, Z_0)$  un repère fixe du référentiel  $(\mathcal{R}_0)$ , du laboratoire, supposé galiléen. On munit ce repère de la base cartésienne  $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$  habituelle.

On note  $(O', X, Y, Z)$  un repère fixe du référentiel  $(\mathcal{R})$  constitué par le bras mobile. Le bras peut seulement effectuer un mouvement de translation rectiligne de faible amplitude, sans frottement, parallèlement à l'axe

$OY_0$  et reste toujours dans le plan  $(OX_0Y_0)$  (figure 1).

On note  $(O'', X', Y', Z')$  un repère fixe du référentiel  $(\mathcal{R}')$  constitué par la roue complète déformée. La roue est reliée au bras par une *liaison pivot parfaite* et effectue un mouvement de rotation d'angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $OX$  (figure 2). La roue reste toujours dans le plan  $(OY_0Z_0)$ .

Le défaut ponctuel  $(A, \Delta m)$  est placé à la périphérie de la roue parfaite complète, sur sa face extérieure.

On négligera la masse et l'influence des parties mobiles de l'équilibreur devant celles de la roue complète.

On pose  $D > 0$  la distance du point  $O$  au plan  $(O'YZ)$ . Le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est uniforme et dirigé selon la verticale descendante du lieu.

Les angles seront comptés positivement dans le sens trigonométrique.

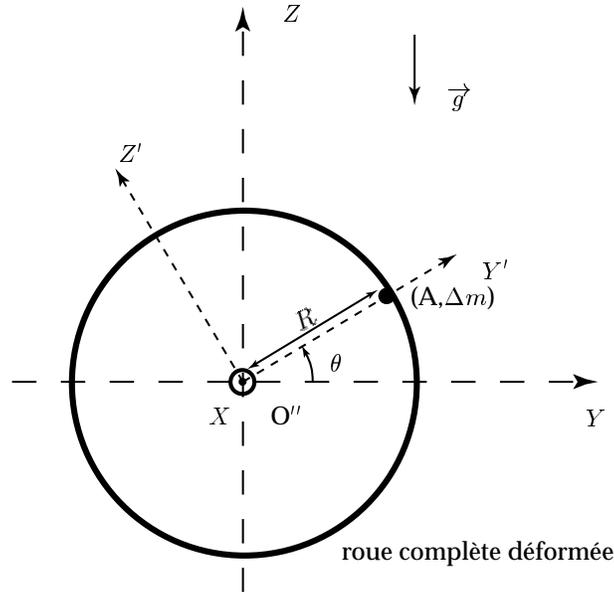


Figure 2: Roue complète déformée montée sur l'équilibreur - vue de face

## 1.1. Étude cinétique

On notera  $X_0(t)$ ,  $Y_0(t)$  et  $Z_0(t)$  les coordonnées de  $O'$  relativement à  $(O, X_0, Y_0, Z_0)$ .

On exprimera impérativement les composantes de tous les vecteurs dans la base  $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$ .

On rappelle l'expression du moment d'inertie  $I_{\Delta_X}$  d'un cylindre de révolution homogène de section circulaire de rayon  $R$ , de masse  $m$  et d'axe de révolution  $\Delta_X$  :

$$I_{\Delta_X} = \frac{1}{2}mR^2$$

**1.1.1.** Exprimer les composantes du vecteur position  $\vec{O'A}$  sur la base  $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$ , en fonction de  $e$ ,  $R$ , et  $\theta$ .

**1.1.2.** Soit  $G$  le centre d'inertie de la roue complète déformée. Exprimer les composantes du vecteur  $\vec{O'G}$  sur la base  $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$ , en fonction de  $m$ ,  $\Delta m$ ,  $e$ ,  $R$ , et  $\theta$ .

**1.1.3.** Déterminer les composantes de  ${}^{\mathcal{R}}\vec{v}_A$ , vecteur vitesse du défaut ponctuel  $(A, \Delta m)$  par rapport au référentiel  $(\mathcal{R})$  lié au bras mobile.

**1.1.4.** Exprimer les composantes de  ${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_A(O')$ , moment cinétique de  $(A, \Delta m)$  au point  $O'$  par rapport au référentiel  $(\mathcal{R})$ .

**1.1.5.** Rappeler la définition du *référentiel barycentrique*  $(\mathcal{R}^*)$ . Quel est le référentiel barycentrique de la roue parfaite ?

1.1.6. Énoncer le théorème de KÖNIG relatif au moment cinétique.

1.1.7. Exprimer les composantes de  ${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_R(O')$ , moment cinétique de la roue complète parfaite au point  $O'$  par rapport au référentiel  $(\mathcal{R})$ , en fonction de  $m$ ,  $R$ , et  $\dot{\theta} = d\theta/dt$ .

1.1.8. D'après les questions précédentes, déterminer les composantes de  ${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}(O')$  le moment cinétique de la roue complète déformée au point  $O'$  par rapport au référentiel  $(\mathcal{R})$ .

## 1.2. Étude dynamique

On suppose que le bâti exerce sur le bras mobile une réaction  $\vec{R}$  de composantes  $(R_{X_0}, R_{Y_0}, R_{Z_0})$  dans la base  $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$ .

La roue complète déformée est fixée sur le bras par l'intermédiaire d'une liaison *pivot parfaite* qui exerce sur la roue un effort de moment  $\vec{C}$  dont les composantes sont données par  $(C_{X_0}, C_{Y_0}, C_{Z_0})$  dans la base  $(\vec{I}_0, \vec{J}_0, \vec{K}_0)$ .

D'autre part on suppose qu'un dispositif annexe, que l'on n'étudiera pas, exerce sur la roue un couple de moment  $\vec{\Gamma} = \Gamma(t)\vec{I}_0$  qui permet de maintenir la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  de la roue *constante*. On notera  $\omega = \dot{\theta}$  cette vitesse angulaire ou pulsation constante dans toute la suite du problème.

1.2.1. Le mouvement de translation du bras se faisant sans frottement, que vaut  $R_{Y_0}$  ?

1.2.2. Rappeler la définition d'une liaison pivot parfaite d'axe  $O'X$ . Que vaut  $C_{X_0}$  dans ce cas ?

1.2.3. Rappeler l'énoncé du théorème du centre d'inertie.

1.2.4. Rappeler l'énoncé du théorème du moment cinétique en un point fixe d'un référentiel galiléen  $(\mathcal{R}_0)$ . Que devient ce théorème si le référentiel n'est pas galiléen ?

1.2.5. Effectuer dans le référentiel  $(\mathcal{R})$  le bilan des forces qui s'appliquent sur le système composé de la roue complète déformée.

1.2.6. Appliquer le théorème du centre d'inertie par rapport au référentiel  $(\mathcal{R})$ , au système composé de la roue complète déformée et du bras mobile.

1.2.7. En déduire que  $Y_0(t)$  obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{Y}_0(t) = \frac{\Delta m}{m + \Delta m} R \omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (1)$$

On donne pour toute la suite du problème les conditions initiales suivantes :  $\theta_0 = 0$ ,  $Y_0(0) = 0$  et  $\dot{Y}_0(0) = 0$ .

1.2.8. Appliquer le théorème du moment cinétique au système composé de la roue complète déformée, au point  $O'$  et par rapport au référentiel  $(\mathcal{R})$ .

1.2.9. Montrer qu'en toute rigueur, le bras mobile décrit des oscillations selon  $OY_0$  à la pulsation  $\omega$  *constante* si le couple  $\Gamma(t)$  obéit à une relation que l'on donnera en fonction de  $R$ ,  $\Delta m$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $\omega$  et  $t$ .

## 1.3. Applications

1.3.1. Déduire de la relation (1) la nature du mouvement de l'ensemble {bras mobile + roue complète} dans le plan  $(OX_0Y_0)$ . On donnera en particulier l'expression de l'amplitude  $Y_{0 \max}$  en fonction des données du problème.

1.3.2. En réalité le mouvement du bras mobile dans le plan  $OX_0Y_0$  est un mouvement de rotation d'angle  $\varphi$  autour de  $OZ_0$  de très faible amplitude, assimilable au mouvement de translation selon  $OY_0$  que nous avons étudié. En utilisant les résultats précédents, exprimer  $\varphi_{\max}$  en fonction de  $Y_{0 \max}$  et  $D$ .

1.3.3. Que valent  $Y_{0 \max}$  et  $\varphi_{\max}$  pour une roue complète parfaite ?

1.3.4. Comment  $Y_{0 \max}$  et  $\varphi_{\max}$  varient-ils avec  $\Delta m$  ?

**1.3.5.** On suppose qu'une voiture équipée d'une roue déformée présentant un défaut d'équilibrage se déplace en ligne droite à vitesse constante. Le volant du véhicule est fixé sur l'axe  $OZ_0$ . Comment le défaut d'équilibrage peut-il être ressenti par le conducteur ?

On suppose que la roue déformée présente un défaut d'équilibrage  $(A, \Delta m)$  externe, à la périphérie de la roue complète, comme indiqué sur la figure 1.

**1.3.6.** Montrer en faisant un minimum de calculs que l'on peut remédier à ce défaut en plaçant une masse supplémentaire  $\Delta m$  en un endroit bien précis de la roue complète que l'on déterminera.

## 2<sup>ème</sup> partie

### Modélisation d'une suspension d'automobile

Nous abordons dans cette partie une modélisation élémentaire de la suspension d'une roue complète de voiture. Cette roue est supposée parfaite (pas de défaut d'équilibrage).

On suppose que le véhicule est équipé de quatre suspensions identiques, que l'on modélise comme indiqué sur la figure 3.

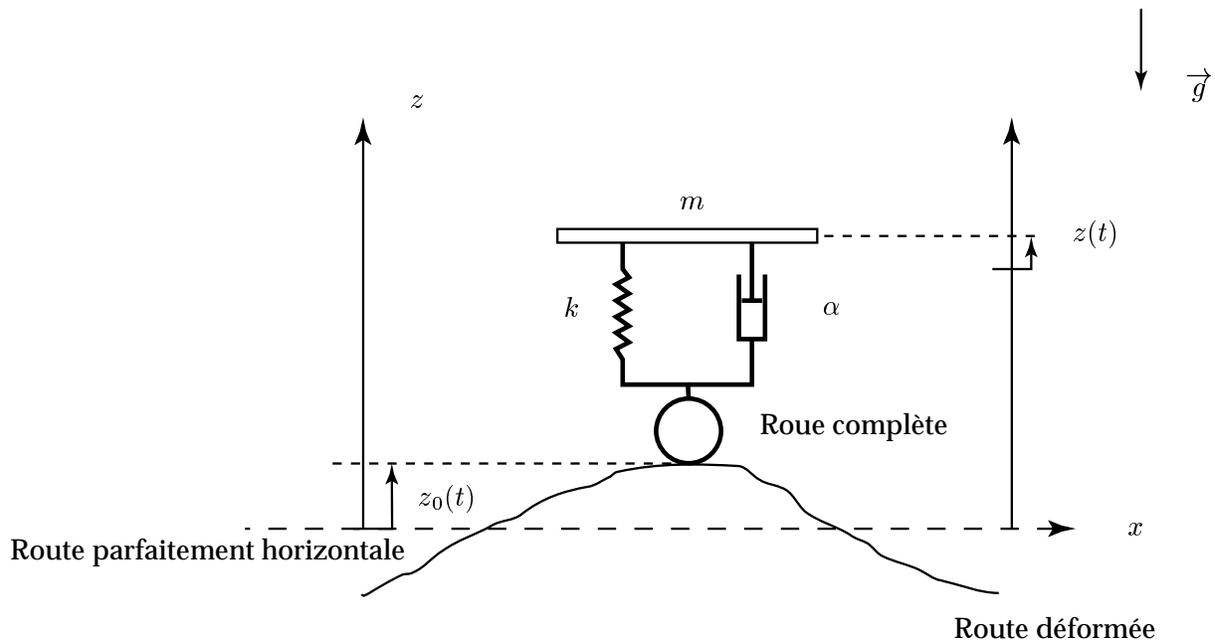


Figure 3: Suspension d'une roue de voiture

Chaque suspension est composée d'une part d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L_0$ . D'autre part un amortisseur fluide à huile de coefficient d'amortissement  $\alpha$  permet d'atténuer d'éventuelles oscillations. On rappelle qu'un amortisseur fluide du type représenté sur la figure 3 exerce sur chacune de ses extrémités une force dissipatrice proportionnelle à la vitesse *relative* d'une de ses extrémités par rapport à l'autre. D'autre part le coefficient  $\alpha$  est d'autant plus grand que le fluide utilisé est visqueux. Ainsi  $\alpha_{huile} \gg \alpha_{air}$  par exemple.

Cet ensemble {ressort + amortisseur} est relié au véhicule (châssis) et à la roue complète parfaite par des articulations supposées elles aussi parfaites. On ne s'intéressera dans ce problème qu'aux mouvements verticaux du châssis, selon l'axe  $Oz$  ascendant.

La masse du véhicule dans les conditions de l'étude (avec passagers) est  $m' = 4m$ . On néglige la masse de l'ensemble {ressort + amortisseur} devant la masse  $m = m'/4$  du quart de châssis représenté sur la figure 3. Le référentiel d'étude est supposé galiléen. On travaillera dans le repère  $(O, x, y, z)$  muni de la base cartésienne habituelle  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . La variable  $z(t)$  représente l'écart de position du châssis par rapport à sa position lorsqu'il n'y a aucun mouvement vertical. La variable  $z_0(t)$  représente le profil de la route, c'est à dire l'écart de celle-ci par rapport à l'horizontale choisie comme niveau de référence. Par conséquent, lorsque

la route est parfaitement horizontale et le mouvement stabilisé, on a  $z(t) = 0$  et  $\dot{z}_0(t) = 0$ .

## 2.1. Équation différentielle

On suppose tout d'abord que le véhicule est au repos sur une route parfaitement horizontale. La longueur de chaque ressort est alors  $l_0$ .

**2.1.1.** Déterminer l'expression de  $\Delta l_0 = L_0 - l_0$  en fonction des données du problème.

On suppose maintenant que le véhicule est en mouvement sur une route rectiligne de profil quelconque.

**2.1.2.** Faire un bilan des forces exercées sur la masse  $m$  qui représente un quart du châssis. On exprimera les différentes forces en fonction des données du problème.

**2.1.3.** Établir l'équation différentielle vérifiée par  $z(t)$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = f(t) \quad (2)$$

avec  $f(t)$  une fonction du temps dont on donnera l'expression en fonction de  $z_0(t)$ ,  $\dot{z}_0(t)$  et d'autres données du problème.

**2.1.4.** Mettre l'équation différentielle précédente sous la forme :

$$z + 2\frac{\beta}{\omega_0}\dot{z} + \frac{1}{\omega_0^2}\ddot{z} = G(t) \quad (3)$$

Exprimer la pulsation propre  $\omega_0$  et le coefficient  $\beta$  en fonction des données. Pourquoi appelle-t-on  $\beta$  coefficient d'amortissement ou coefficient d'amortissement réduit ?

## 2.2. Réponse indicielle

On suppose que le véhicule suit une trajectoire rectiligne selon  $Ox$  à la vitesse constante  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{I}$  dans la base cartésienne habituelle  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  avec  $v_0 > 0$ . Le conducteur peu attentif monte de face sur un trottoir dont le profil est représenté sur la figure 4.

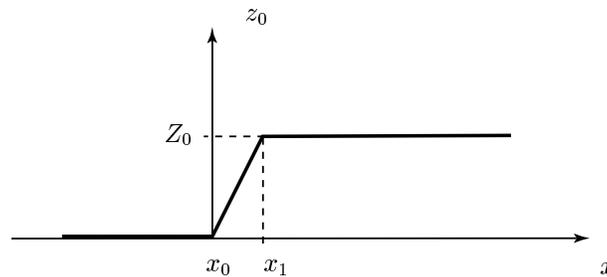


Figure 4: Profil de route

On suppose que le mouvement selon  $Ox$  reste rectiligne uniforme même pendant le passage de l'obstacle et que la roue reste toujours en contact avec la route.

**2.2.1.** Représenter graphiquement sur la copie le profil de la route  $z_0 = z_0(t)$  en fonction du temps. On posera  $\varepsilon = (x_1 - x_0)/v_0$  et on prendra  $t = 0$  pour  $x = x_0$ .

**2.2.2.** Donner les équations horaires de  $z_0(t)$  pour les instants  $t$  tels que  $t \in [0, \varepsilon]$  et pour  $t \in [\varepsilon, +\infty[$ .

On donne pour toute la suite de cette partie  $\alpha = 10^4 \text{ SI}$ ,  $k = 40 \times 10^3 \text{ SI}$ ,  $x_1 - x_0 = 1 \text{ cm}$ ,  $m = 400 \text{ kg}$ ,  $Z_0 = 10 \text{ cm}$  et  $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ .

**2.2.3.** Quelles sont les unités de  $k$  et  $\alpha$  dans le système international ? Déterminer numériquement les valeurs de  $\omega_0$  et  $\beta$ .

**2.2.4.** Montrer que pour les instants  $t$  appartenant à  $[0, \varepsilon]$ , on peut supposer en bonne approximation que la fonction  $G(t)$  du second membre de l'équation différentielle (3) est constante.

**2.2.5.** D'après la question précédente, donner l'expression de  $G(t)$  et résoudre l'équation différentielle (3) pour les instants  $t$  appartenant à  $[0, \varepsilon]$ . On mettra  $z(t)$  sous la forme :

$$z(t) = A \exp r_1 t + B \exp r_2 t + C$$

avec  $r_2 > r_1$ . Donner les expressions de  $r_1$  et  $r_2$  en fonction de  $\beta$  et  $\omega_0$  ainsi que l'expression de  $C$  en fonction des données du problème.

**2.2.6.** On donne les conditions initiales suivantes en  $t = 0$  :  $z(0) = 0$  et  $\dot{z}(0) = 0$ . On admet sans calcul que les valeurs numériques des données du problème sont telles que  $|\varepsilon r_1| \ll 1$  et  $|\varepsilon r_2| \ll 1$ . Montrer que  $z(\varepsilon)$  est nul à l'ordre zéro en  $\varepsilon$  alors que  $\dot{z}(\varepsilon)$  ne l'est pas. On prendra aussi désormais pour la suite  $\dot{z}(\varepsilon) \approx 0$ .

**2.2.7.** Résoudre l'équation différentielle (3) pour les instants  $t$  appartenant à  $[\varepsilon, \infty[$ . On exprimera les constantes d'intégration  $A'$  et  $B'$  en fonction des données du problème.

**2.2.8.** Rappeler l'expression de  $\beta$  en fonction de  $\alpha$ ,  $m$  et  $k$ . Représenter sur la copie l'allure de  $z(t)$  pour  $\beta > 1$  puis pour  $\beta < 1$ .

Lorsque le véhicule est neuf, les caractéristiques physiques  $\alpha$  et  $k$  de la suspension sont telles que  $\beta > 1$  pour un bon confort et une meilleure sécurité des usagers. En vieillissant, les amortisseurs fluides se dégradent et l'huile peut devenir moins visqueuse ou être remplacée en partie par de l'air.

**2.2.9.** Quelle est la conséquence de ce vieillissement sur le facteur d'amortissement  $\beta$ ? Quelle peut en être la conséquence sur le confort des usagers lorsque le véhicule rencontre un obstacle sur la route?

**2.2.10.** Il arrive que des automobilistes imprudents dépassent la charge maximale autorisée pour leur véhicule aux suspensions déjà usées. Quelles peuvent être les conséquences sur la sécurité?

## 2.3. Réponse harmonique

On suppose cette fois que le profil de la route est de la forme :

$$z_0(t) = Z_0 \cos \omega t$$

Le véhicule se déplace toujours en ligne droite selon  $Ox$  avec une vitesse moyenne constante :  $\vec{v} = v \vec{I}$  avec  $v > 0$ . On adoptera la notation complexe habituelle :

$$\underline{z}(t) = \underline{Z} \exp i \omega t$$

**2.3.1.** Établir l'expression de la fonction de transfert harmonique  $\underline{H}(i\omega) = \underline{Z}/\underline{Z}_0$  de la suspension en fonction de  $\beta$ ,  $\omega_0$  et  $\omega$ .  $\underline{Z}$  et  $\underline{Z}_0$  sont les amplitudes complexes associées respectivement à  $z(t)$  et  $z_0(t)$ .

**2.3.2.** Déterminer le diagramme de BODE asymptotique du gain  $G(\omega) = 20 \log_{10} H(\omega)$  de la suspension, avec  $H(\omega) = |\underline{H}(i\omega)|$  le module de la fonction de transfert, pour  $\omega \ll \omega_0$  et  $\omega \gg \omega_0$ .

**2.3.3.** Représenter graphiquement sur la copie le diagramme de BODE asymptotique du gain en fonction de  $\omega/\omega_0$  en représentation semi-logarithmique pour  $\omega/\omega_0$  variant de 0,1 à 10. Que peut-on en déduire du comportement de  $G(\omega)$ ?

L'usager a un bon confort de conduite si le châssis est pratiquement insensible aux ondulations de la route.

**2.3.4.** Exprimer la pulsation  $\omega$  en fonction de la vitesse moyenne  $v$  et de  $\lambda$  la période spatiale des ondulations de la route.

**2.3.5.** Lors du rallye Paris-Dakar, les concurrents affrontent souvent des profils de route de type « tôle ondulée ». Si la période spatiale d'un tel profil est  $\lambda = 1,5$  m, quelle vitesse minimum doit-on conseiller aux pilotes?

2.3.6. Si les pilotes entrent dans une zone où le profil ondulé s'élargit, c'est à dire si  $\lambda$  augmente, que faut-il conseiller aux pilotes ?

## Deuxième problème

### Étude thermodynamique d'un moteur de voiture

Ce problème traite de quelques aspects élémentaires du fonctionnement d'un moteur thermique à combustion interne.

On raisonne sur une masse unité d'un mélange de gaz dont la nature évolue au cours d'un cycle. Pour simplifier l'analyse, on assimilera ce mélange à de l'air supposé se comporter comme un gaz parfait de capacités calorifiques massiques  $c_p$  et  $c_v$  constantes et de rapport  $\gamma = c_p/c_v = 1,4$ .

On suit l'évolution de cette masse unité pour un cycle de fonctionnement d'un des quatre cylindres identiques du moteur.

Le volume offert au gaz dans ce cylindre varie entre la valeur maximale  $V_1$  – piston au point mort bas – et la valeur minimale  $V_2$  – piston au point mort haut –. On définit un taux de compression  $\tau$  par  $\tau = V_1/V_2 > 1$  et un rapport  $\alpha$  des températures extrêmes du cycle par :  $\alpha = T_{max}/T_{min}$ .

On utilise la convention de signe habituelle de la thermodynamique.

On a représenté sur la figure 1 un cycle théorique représentant l'évolution réversible en diagramme  $PV$  de l'unité de masse de gaz dans un cylindre.

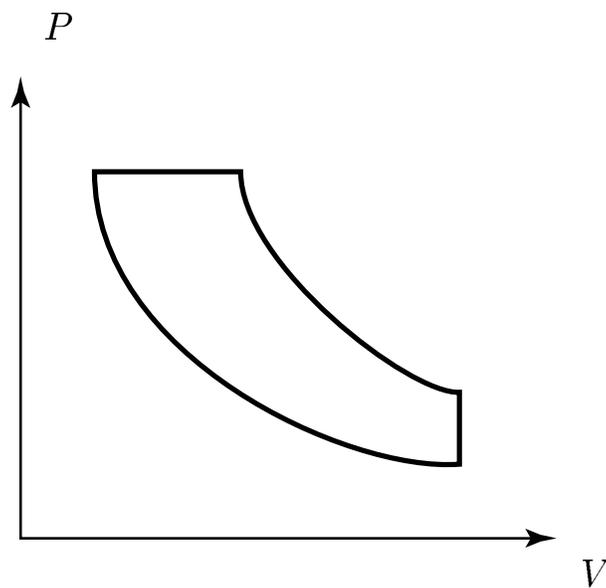


Figure 1: Cycle réversible théorique

Les différentes étapes du cycle sont réversibles et se décomposent ainsi :

Étape A : le gaz est admis dans le cylindre à la pression atmosphérique  $P_1 = 10^5 Pa$  et à la température ambiante  $T_1 = 300 K$  du point mort bas (point 1) ;

Étape B : le gaz est ensuite comprimé de manière adiabatique pour atteindre le point 2 à la pression  $P_2$ , la température  $T_2$  et le volume  $V_2$  du point mort haut ;

Étape C : le gaz subit une explosion qui le détend à pression constante et élève ainsi sa température jusqu'à  $T_3$  (point 3) ;

Étape D : le gaz subit une détente adiabatique jusqu'au point 4 de volume  $V_4$ , de température  $T_4$  et de pression  $P_4$  ;

Étape E : le gaz est finalement rejeté vers l'atmosphère en terminant le cycle au point 1.

On donne les valeurs numériques suivantes pour tout le problème :  $10^{0,4} = 2,5$  ;  $10^{-0,4/1,4} = \frac{1}{2}$  ;  $(10^{-0,4})^{1,4} = \frac{1}{4}$  ;  $10^{1,4/0,4} = 3 \times 10^3$  ;  $\gamma = c_p/c_v = 1,4$  ;  $\alpha = 10$  et  $\tau = 10$ .

### 1<sup>ère</sup> partie

#### Étude qualitative du cycle

1.1. Après avoir représenté le cycle sur la copie, indiquer par des flèches le sens de parcours moteur du cycle en justifiant ce choix.

1.2. Placer les points 1, 2, 3 et 4 sur ce cycle.

1.3. Indiquer sur le cycle les transferts thermiques positifs et négatifs.

### 2<sup>ème</sup> partie

#### Étude quantitative du cycle

On exprimera toutes les températures en fonction de  $T_1$  et des paramètres choisis parmi  $\alpha$ ,  $\tau$  et  $\gamma$  uniquement. De même on exprimera toutes les pressions en fonction de  $P_1$  et des paramètres choisis parmi  $\alpha$ ,  $\tau$  et  $\gamma$  uniquement.

#### 2.1. Point 2

2.1.1. Déterminer l'expression littérale de la température  $T_2$ . Calculer numériquement la température  $T_2$ .

2.1.2. Déterminer l'expression littérale de la pression  $P_2$ . Calculer numériquement la pression  $P_2$ .

#### 2.2. Point 3

2.2.1. Déterminer l'expression de  $\alpha$  en fonction de deux températures choisies parmi  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ .

2.2.2. Déterminer l'expression littérale de la température  $T_3$ . Calculer numériquement la température  $T_3$ .

2.2.3. Déterminer l'expression littérale de la pression  $P_3$ . Calculer numériquement la pression  $P_3$ .

#### 2.3. Point 4

2.3.1. Déterminer l'expression littérale de la température  $T_4$ . Calculer numériquement la température  $T_4$ .

2.3.2. Déterminer l'expression littérale de la pression  $P_4$ . Calculer numériquement la pression  $P_4$ .

### 3<sup>ème</sup> partie

#### Rendement d'un cycle moteur

3.1. Rappeler la définition du rendement  $\eta$  d'un cycle moteur.

#### 3.2. Rendement du cycle théorique

3.2.1. Donner l'expression de  $\eta$  en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  et  $\gamma$ .

3.2.2. En déduire l'expression littérale de  $\eta$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\tau$  et  $\gamma$ .

3.2.3. Calculer numériquement la valeur de  $\eta$ .

### 3.3. Cycle de Carnot

3.3.1. Rappeler la définition d'un cycle de CARNOT. Représenter sur la copie un cycle de CARNOT moteur, entre les températures extrêmes  $T_{min}$  et  $T_{max}$ , en diagramme  $(P, V)$ .

3.3.2. Établir l'expression du rendement  $\eta_c$  du cycle moteur de CARNOT en fonction de  $T_{min}$  et  $T_{max}$ .

3.3.3. Établir l'expression du rendement  $\eta_c$  d'un cycle de CARNOT moteur qui fonctionnerait entre les mêmes températures extrêmes que le cycle théorique du problème. Calculer numériquement ce rendement  $\eta_c$ .

3.3.4. Comparer  $\eta$  et  $\eta_c$  et conclure.

## 4<sup>ème</sup> partie

### Prise en compte des frottements internes

En réalité les étapes B (compression adiabatique) et D (détente adiabatique) ne sont pas réversibles du fait des frottements internes du piston sur la chambre du cylindre. Elles gardent cependant leur caractère adiabatique. On suppose ici que l'irréversibilité *ne modifie que* les températures des points 2 et 4, tous les autres paramètres thermodynamiques gardant par ailleurs la même valeur que dans la situation réversible. Les étapes C et E sont donc toujours supposées réversibles.

On notera avec un « ' » les grandeurs thermodynamiques relatives aux transformations irréversibles.

4.1. Représenter sur la copie l'allure du cycle moteur *totalelement réversible* de la partie 1 en diagramme  $TS$  avec l'entropie  $S$  en abscisses. On appelle (TS1) cette figure. Indiquer sur cette figure (TS1) le sens de parcours du cycle et placer les points 1, 2, 3 et 4.

4.2. Rappeler l'énoncé du second principe de la thermodynamique.

4.3. On suppose maintenant que les étapes B et D sont irréversibles. Représenter en pointillés sur la figure (TS1) des étapes irréversibles (B') et (D') possibles. Justifier ce choix.

4.4. Comparer en le justifiant  $T_2$  et  $T_2'$  ainsi que  $T_4$  et  $T_4'$ .

4.5. On note  $\beta = T_2'/T_2$  un facteur correctif dû aux frottements internes. On supposera pour simplifier que l'on a aussi  $T_4'/T_4 = \beta$ .

4.5.1. Exprimer le rendement  $\eta'$  du cycle moteur avec irréversibilités en fonction de  $T_1$ ,  $T_2'$ ,  $T_3$ ,  $T_4'$  et  $\gamma$ .

4.5.2. En déduire l'expression du rendement  $\eta'$  du cycle moteur avec irréversibilités en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

4.5.3. Montrer que  $\eta' < \eta$ .

4.5.4. Quel est le rôle des huiles de lubrification utilisées dans les moteurs ?

FIN DE L'ÉPREUVE